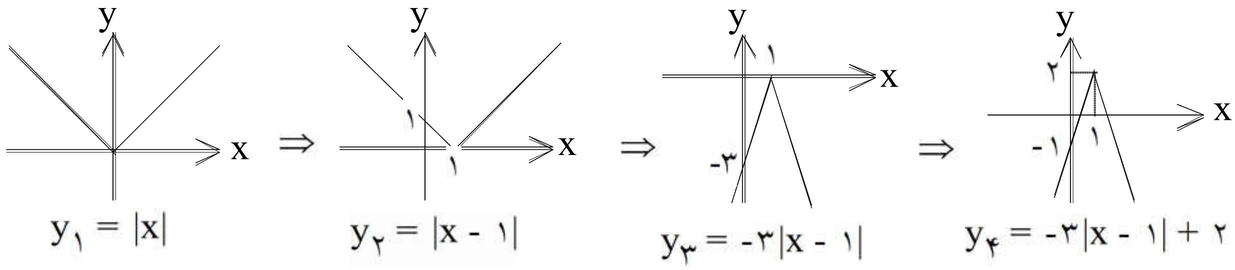
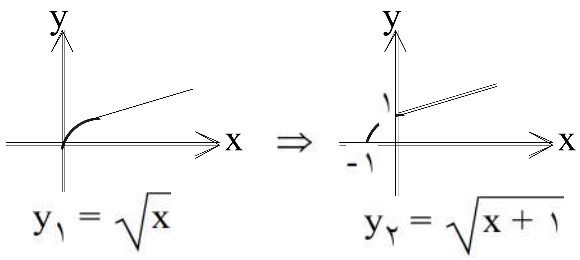
مجموعه تست دبیرستان **ممتاز حنان**

درس: **حسابان** پایه: دوازدهم

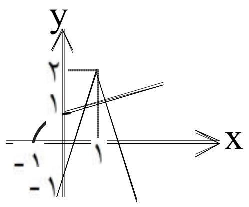
موضوع: **حل معادلات به روش هندسی** **نام دبیر: استاد علی مقدم**

۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. از رسم نمودار استفاده می‌کنیم:

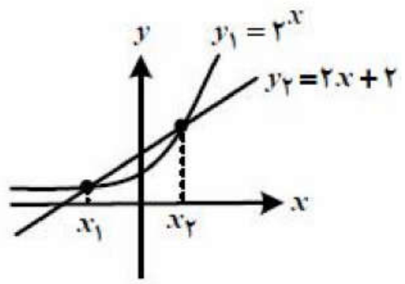




حالا محل تلاقی دو نمودار را می‌یابیم:



۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. معادله‌ی $y_2 = 2x + 2 \, , \, y_1 = 2^x$ را رسم کرده محل‌های تقاطع تعداد جواب هستند. با رسم شکل معادله دارای دو جواب می‌باشد.



۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

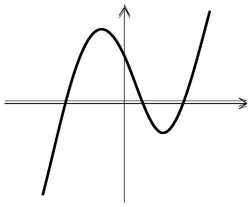
$$x \operatorname{Sin} x = 1 \Rightarrow \operatorname{Sin} x = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = \operatorname{Sin} x \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

این معادله بی‌شمار جواب دارد. چون نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ در بی‌شمار نقطه نمودار تابع $y = \operatorname{Sin} x$ را قطع می‌کند.

-۴ $f(x)=x^{۳}-۳x+\frac{۱}{۳} \Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۱ \end{cases}$

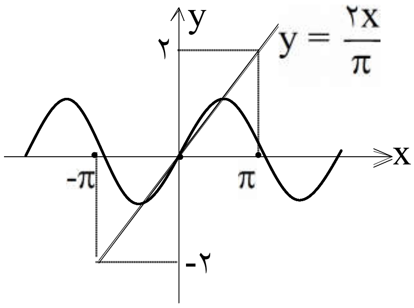
x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
f'(x)		+		−		−		+	
f(x)		↙		↘		↘		↙	
	$-\infty$		$۲\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۳}$		$-۲\frac{۱}{۳}$		

یک ریشه یک ریشه یک ریشه

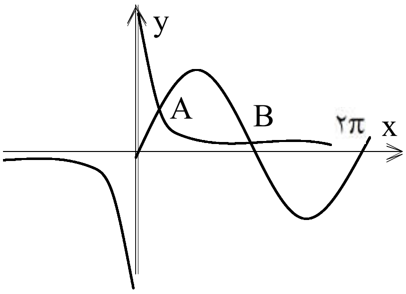


معادله دو ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد، بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.

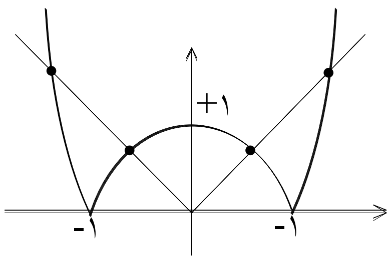
-۵ برای تعیین محل تقاطع باید هر دو منحنی را رسم کنیم داریم: با توجه به شکل معلوم می‌شود که منحنی ۱ در سه نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند پس گزینه ۳ صحیح است.



-۶ از معادله مفروض خواهیم داشت $\sin x=\frac{۱}{x}$ پس ریشه‌های معادله مفروض طولهای نقاط بر خورد منحنی $y_{۱}=\frac{۱}{x}$ و $y_{۱}=\sin x$ است با رسم شکل تابع سینوسی و هموگرافیک در فاصله $[۰\ ,\ ۲\pi]$ دو نقطه برخورد پدید می‌آید پس معادله دو ریشه در این فاصله دارد و گزینه ۳ جواب صحیح است.



-۷

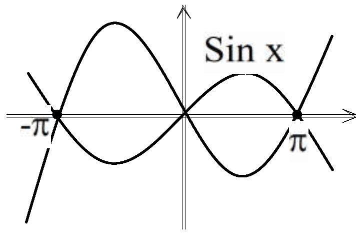


با توجه به شکل مقابل، منحنی $|x|$ و $|x^{۲}-۱|$ یکدیگر را در چهار نقطه قطع می‌کنند. بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح است.

-۸ $\frac{\sin x}{x} = x^2 - \pi^2 \Rightarrow \sin x = x^3 - \pi^2 x\,,\ x \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = x^3 - \pi^2 x \Rightarrow y'_2 = 3x^2 - \pi^2 \end{cases}$

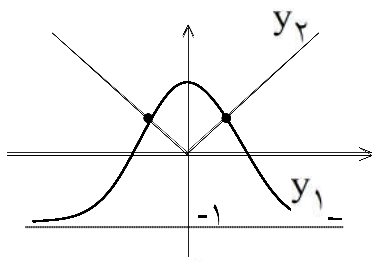
$$y'_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \Rightarrow y_2 = \frac{-2\pi^3}{3\sqrt{3}} \\ x = \frac{-\pi}{\sqrt{3}} \Rightarrow y_2 = \frac{2\pi^3}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{-\pi}{\sqrt{3}}$		$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
y'_2	+		−		+
y_2	↗		↘		↗



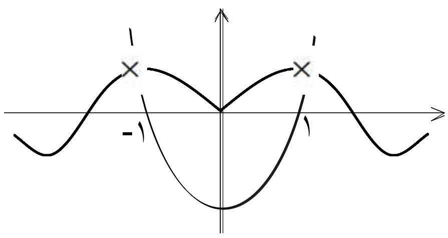
پس این دو منحنی، یکدیگر را در سه نقطهٔ $x = \pi$ و $x = -\pi$ و $x = 0$ قطع می‌کنند. اما $x = 0$ مورد قبول نمی‌باشد (به علت وجود $\frac{\sin x}{x}$ در معادلهٔ اصلی). پس معادله دو ریشه دارد. بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ درست است.

-۹ $\frac{1 - x^2}{1 + x^2} = |x| \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \\ y_2 = |x| \end{cases}$



منحنی $|x|$ در دو نقطه منحنی $\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ را قطع میکند. بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ صحیح است.

-۱۰ تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 1 = |\sin x|$ برابر تعداد نقاط برخورد دو منحنی $y = |\sin x|$ و $y = x^2 - 1$ است. با توجه به شکل، معادله دارای ۲ جواب است. پس گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

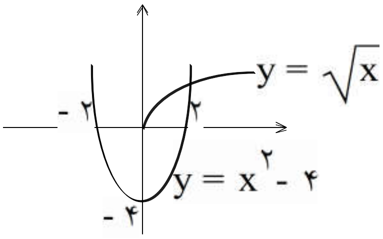


-۱۱ $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = y + 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow (y + 4) + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 + y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

معادلهٔ فوق دو جواب متمایز دارد. به راحتی می‌توان دید: $\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} > -4 \Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} + 4 > 0$

بنابراین به ازای هر جواب y مقدار $x^2 = y + 4$ بامعنی است. پس برای هر جواب y، دو جواب برای x بدست می‌آید. بنابراین نقاط برخورد این دو منحنی، چهار نقطه است. لذا گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

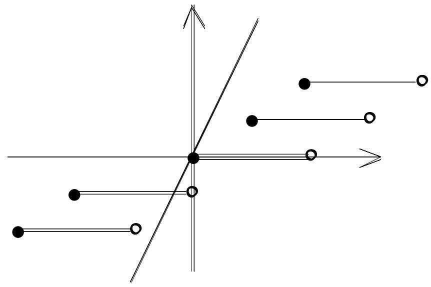
۱۲- تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴ = \sqrt{x}$ برابر تعداد نقاط برخورد دو منحنی $y = x^۲ - ۴$ و $y = \sqrt{x}$ است. برای همین منحنی دو تابع را رسم و تعداد نقاط برخورد را بدست می‌آوریم. پس این دو تابع همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. پس گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح سؤال است.



۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

طبق نمودار دو جواب $x = ۰$ و $x = -\frac{۱}{۴}$ وجود دارد.

$[x] = ۴x$



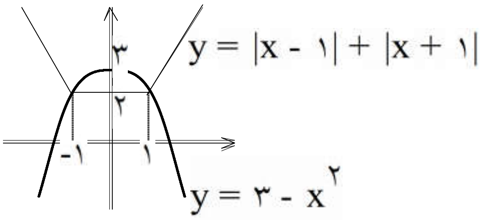
راه دوم:

$$[x] = ۴x = k \in z \Rightarrow \left[\frac{k}{۴}\right] = k \Rightarrow k \leqslant \frac{k}{۴} < k + ۱ \Rightarrow \begin{cases} \frac{k}{۴} \geqslant k \Rightarrow k \leqslant ۰ \\ \frac{k}{۴} < k + ۱ \Rightarrow \frac{۳k}{۴} > -۱ \Rightarrow k > -\frac{۴}{۳} \end{cases} \Rightarrow$$

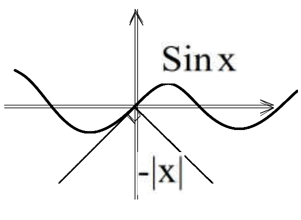
$$-\frac{۴}{۳} < k \leqslant ۰ \Rightarrow \begin{cases} k = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ k = -۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۴} \end{cases}$$

۱۴- گزینهٔ ۴ پاسخ صحیح است.

با توجه به نمودار مقابل، معادلهٔ مذکور دو ریشه دارد. $(x = \pm ۱)$

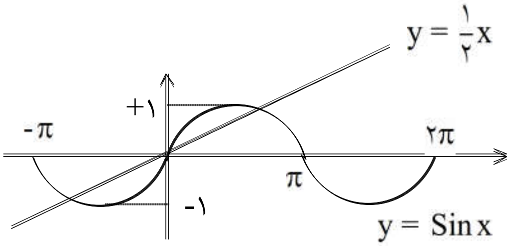


۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار توابع، معادله داده شده یک جواب دارد. دقت کنید که شیب $-|x|$ و شیب $\sin x$ در سمت چپ مبدأ مختصات هر دو برابر یک است. بنابراین بر هم مماسند. پس فقط در مبدأ همدیگر را قطع می کنند.

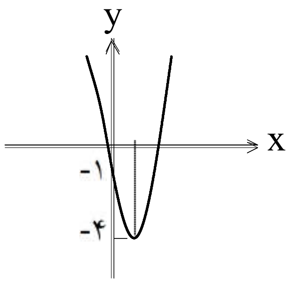


۱۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در سه نقطه متقاطع‌اند.

$$\sin x = \frac{x}{۲} \qquad \begin{cases} y = \sin x \\ y = \frac{۱}{۲} x \end{cases}$$



۱۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ریشه‌های معادله‌ی $x^۴ - ۴x - ۱ = ۰$، محل تلاقی نمودار $f(x) = x^۴ - ۴x - ۱$ با محور xهاست. نمودار f را رسم می‌کنیم.



$$f'(x) = ۴x^۳ - ۴ \xrightarrow{f'(x) = ۰} x = ۱$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f'		-	۰	+	
f	$+\infty$	↘	-۴	↗	$+\infty$

همان‌طور که مشخص است، f دارای دو ریشه است.

۱۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ریشه‌های معادله‌ی $x^۵ - ۳x + ۱ = ۰$ ، ریشه‌های تابع $f(x) = x^۵ - ۳x + ۱$ هستند. مقدار تابع f را در برخی نقاط می‌یابیم.

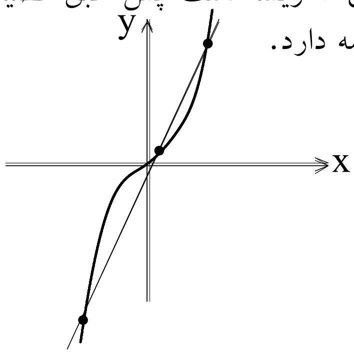
x	-۲	۰	۱	۲
f(x)	-۲۵	۱	-۱	۲۷
	[-]	[+]	[-]	[+]

با توجه به جدول روبه‌رو و قضیه‌ی مقدار میانی f حداقل ۳ ریشه دارد از طرفی $f'(x) = ۵x^۴ - ۳$ دارای ۲ ریشه است پس طبق قضیه‌ی رول، f حداکثر ۳ ریشه دارد، پس f دقیقاً ۳ ریشه دارد.

راه دوم:

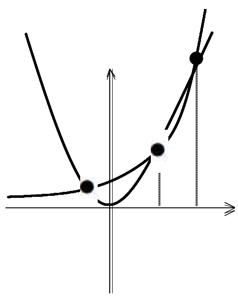
به کمک رسم

$$x^۵ - ۳x + ۱ = ۰ \to x^۵ = ۳x - ۱ \to \begin{cases} y = x^۵ \\ y = ۳x - ۱ \end{cases}$$

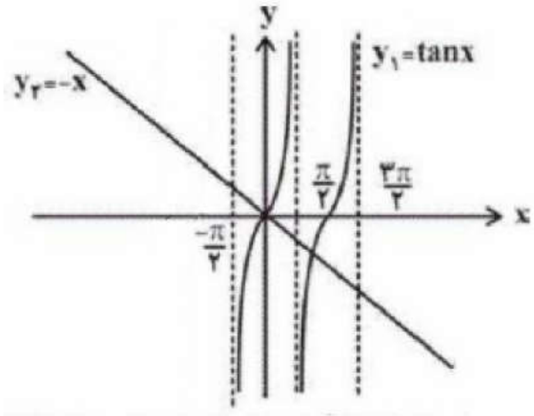


۱۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

با رسم دو تابع $y = ۲^x$, $y = x^۲$ پیدا ست که در ۳ نقطه متقاطع‌اند، که دو نقطه از این سه نقطه $x = ۲$ و $x = ۴$ می‌باشد و نقطه‌ی سوم نقطه‌ای با طول منفی است.



۲۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



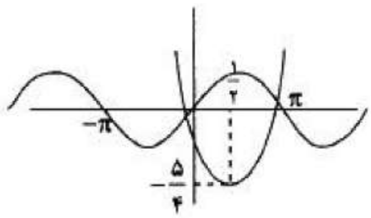
$$\operatorname{Sin} x + x\operatorname{Cos} x = ۰ \Rightarrow \operatorname{Sin} x = -x\operatorname{Cos} x \xrightarrow{\operatorname{Cos} x \neq ۰} \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} = \frac{-x\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Cos} x}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = -x \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = \operatorname{tg} x \\ y_۲ = -x \end{cases}$$

نمودار $y_۱ = \operatorname{tg} x$ و نمودار $y_۲ = -x$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. همان طور که مشخص است تعداد نقاط تلاقی این دو منحنی در بازه‌ی $\left[\frac{-\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}\right]$، دو نقطه است. پس معادله در بازه‌ی فوق ۲ جواب دارد.

۲۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=x^۲-x-۱=\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲-\frac{۵}{۴}$$

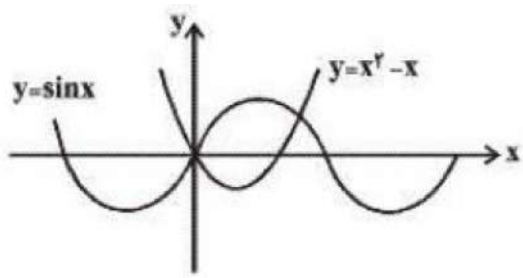


دو نقطه‌ی تلاقی دارند.

$f(x)= \operatorname{Sin} x$ و $g(x)=x^۲-x-۱$ هر دو پیوسته هستند.

۲۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا توجه کنید به این‌که در معادله‌ی $x = ۱ + \frac{\operatorname{Sin} x}{x}$، x در مخرج کسر قرار دارد، باید $x \neq ۰$، با این شرط، طرفین معادله را در x ضرب می‌کنیم:

$$x^۲ = x + \operatorname{Sin} x \Rightarrow x^۲ - x = \operatorname{Sin} x$$

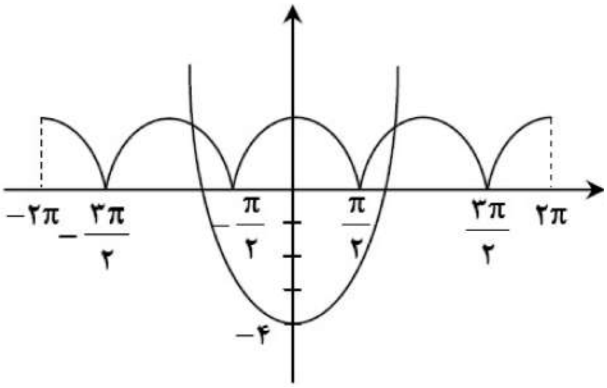


با رسم نمودار $y = x^۲ - x$ و $y = \operatorname{Sin} x$ در یک دستگاه مختصات، مشخص می‌شود که این دو نمودار در دو نقطه که یکی از آن‌ها $x = ۰$ است، متقاطعند ولی طبق شرط اولیه، مقدار $x = ۰$ را نمی‌پذیریم و بنابراین معادله، فقط یک جواب دارد.

۲۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

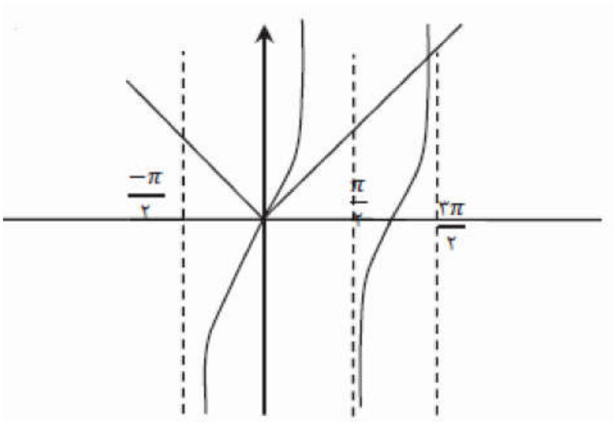
به روش هندسی و از طریق رسم نمودارهای $y = |\text{Cos } x|$ و $y = x^{۲} - ۴$ داریم:

دو نمودار در ۲ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، بنابراین معادله‌ی فوق دارای ۲ ریشه است.



۲۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$\tan x = |x|$



دو جواب دارد.

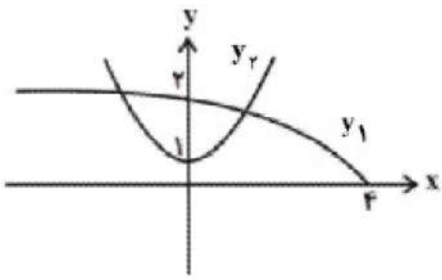
۲۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$x \geq ۰ \Rightarrow x = x + ۴ \text{ Sin } x \Rightarrow \text{Sin } x = ۰ \Rightarrow x = ۰ , \pi , ۲\pi$$

$$x < ۰ \Rightarrow -x + ۴ \text{ Sin } x \Rightarrow \frac{۱}{۲} x = \text{Sin } x \Rightarrow \begin{cases} y = \text{Sin } x \\ y = \frac{۱}{۲} x \end{cases}$$

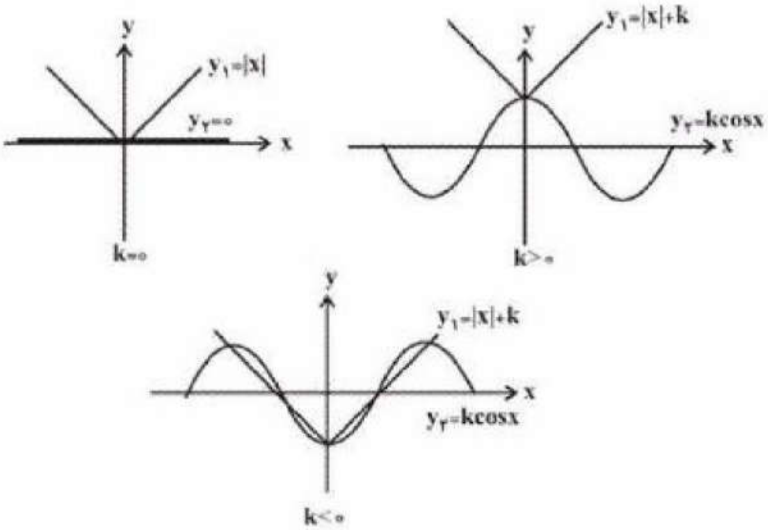
خط $y = \frac{۱}{۲} x$ به ازای $x < ۰$ در یک نقطه‌ی منحنی $y = \text{Sin } x$ را قطع می‌کند، بنابراین این معادله در کل ۴ ریشه دارد.

۲۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. محل برخورد نمودارهای $y_۱ = \sqrt{۴ - x}$ و $y_۲ = ۲^{|x|}$ جواب‌های معادله هستند.



۲۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. واضح است که $x = ۰$ ریشه‌ی معادله است. همچنین با توجه به زوج بودن توابع $y_۱ = |x| + k$ و $y_۲ = k\cos x$ نمودار هر دو تابع نسبت به محور yها متقارن است و تعداد نقاط برخورد آن‌ها در دو طرف محور yها یکسان است. بنابراین معادله دارای تعداد فردی جواب است.

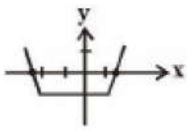
توجه کنید که در حالت $k > ۰$ و $k = ۰$ معادله دارای ۱ جواب است و در حالت $k < ۰$ هر تعداد فردی ممکن است باشد.



۲۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله‌ی تابع را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

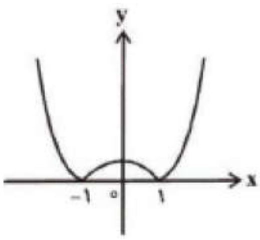
$$f(x) = \begin{cases} -۲x - ۵ & , x < -۲ \\ -۱ & , -۲ \leq x \leq ۱ \\ ۲x - ۳ & , ۱ < x \end{cases}$$

حال نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



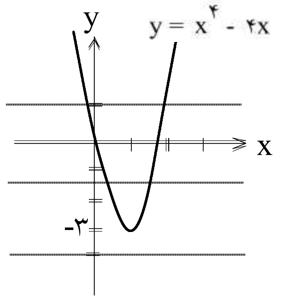
با توجه به نمودار، تابع f، محورهای مختصات را در سه نقطه قطع می‌کند.

۲۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار تابع $y = |x^۲ - ۱|$، تابع در بازه‌ی $[۱ , ۳]$ یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.



۳۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. جواب‌های معادله‌ی $x^۴ - ۴x + a = ۰$ یا $x^۴ - ۴x = -a$ همان طول‌های نقاط تلاقی منحنی تابع $y = x^۴ - ۴x$ و خط افقی $y = -a$ می باشند، ابتدا منحنی تابع $y = x^۴ - ۴x$ را رسم می‌کنیم:

$$y = x^۴ - ۴x \longrightarrow y' = ۴x^۳ - ۴ \xrightarrow{y' = ۰} x = ۱$$



x	$-\infty$	۱	$+\infty$
y'	−		+
y	$+\infty$	-۳ min	$+\infty$

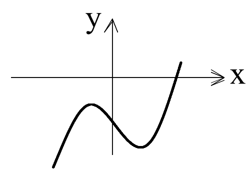
همان‌طور که مشاهده می‌شود خط افقی $y = k$ به ازای $k > ۰$ در دو نقطه، یکی با طول مثبت و دیگری با طول منفی، منحنی تابع را قطع می‌کند، پس باید $-a > ۰$ باشد یعنی $a < ۰$.

۳۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. منحنی $y = x^۳ + x^۲ - x - ۲$ را رسم کرده و نقطه‌ی تلاقی آن را با محور xها تعیین می‌کنیم.

$$y' = ۳x^۲ + ۲x - ۱ \Rightarrow x = -۱ , \frac{۱}{۳}$$

$$f(-۱) = -۱ + ۱ + ۱ - ۲ = -۱$$

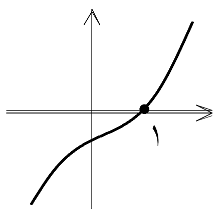
$$f\left(\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۱}{۲۷} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۳} - ۲ = -۲ - \frac{۵}{۲۷}$$



فقط یک ریشه‌ی مثبت دارد.

۳۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ = x \Rightarrow (x - ۱)^۳ = x \Rightarrow \begin{cases} y = (x - ۱)^۳ \\ y = x \end{cases}$$

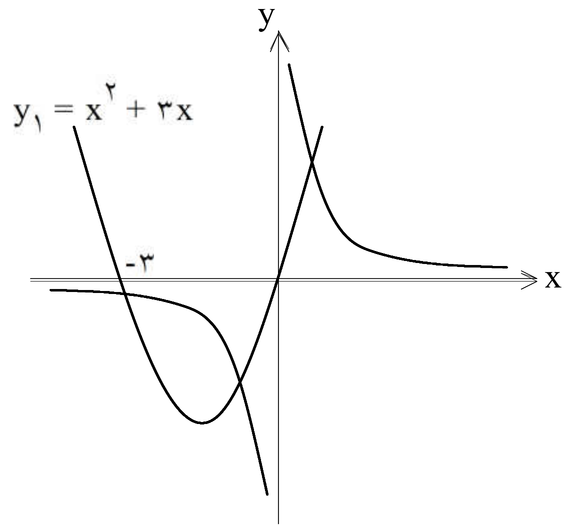


۳۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

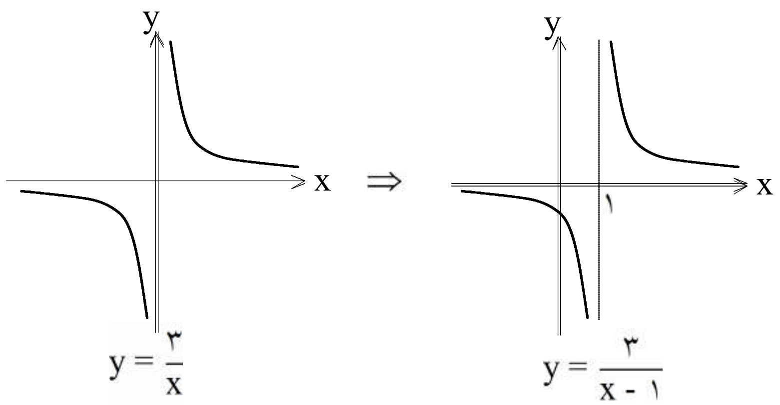
$$(x+1)^3 = 3x + 2 \Rightarrow x^3 + 3x^2 + \cancel{3x} + 1$$

$$\cancel{3x} + 2 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

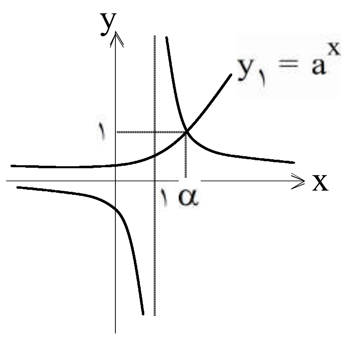
$$\Rightarrow x\left(x^2 + 3x\right) = 1 \Rightarrow \underbrace{x^2 + 3x}_{y_1} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{y_2}$$



۳۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار $y = \frac{3}{x-1}$ را به کمک انتقال رسم می‌کنیم:



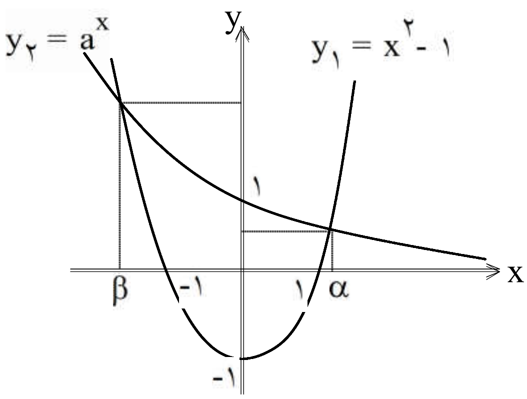
حالا از طریق هندسی، معادله‌ی $\underbrace{a^x}_{y_1} = \underbrace{\frac{3}{x-1}}_{y_2}$ قابل بررسی است. اگر $x = \alpha$ را در هر دو منحنی قرار دهیم، داریم:



$$\begin{cases} a^\alpha > 1 \Rightarrow a^\alpha > a^0 \Rightarrow \alpha > 0 \xrightarrow{\text{طبق شکل}} \alpha > 1 \\ \frac{3}{\alpha - 1} > 1 \xrightarrow[\text{طرفین وسطین می کنیم}]{\alpha - 1 > 0} 3 > \alpha - 1 \Rightarrow \alpha < 4 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 1 < \alpha < 4$$

۳۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. در نامعادلات نمایی به فرم $a^x < a^y$ اگر $۰ < a < ۱$ باشد، آن‌گاه $x > y$ است؛ ولی اگر $a > ۱$ آن‌گاه $x < y$ است.

معادله را به فرم $\underbrace{x^۲ - ۱}_{y_۱} = \underbrace{a^x}_{y_۲}$ می‌نویسیم. حال از طریق هندسی داریم:



اگر α و β را در $y_۱$ و $y_۲$ قرار دهیم، داریم:

$$\begin{cases} a^\alpha < ۱ \Rightarrow a^\alpha < a^۰ \xrightarrow{۰ < a < ۱} \alpha > ۰ \xrightarrow{\text{شکل}} a > ۱ \\ \alpha^۲ - ۱ < ۱ \Rightarrow \alpha^۲ < ۲ \Rightarrow -\sqrt{۲} < \alpha < \sqrt{۲} \end{cases} \xrightarrow{\cap} ۱ < \alpha < \sqrt{۲}$$

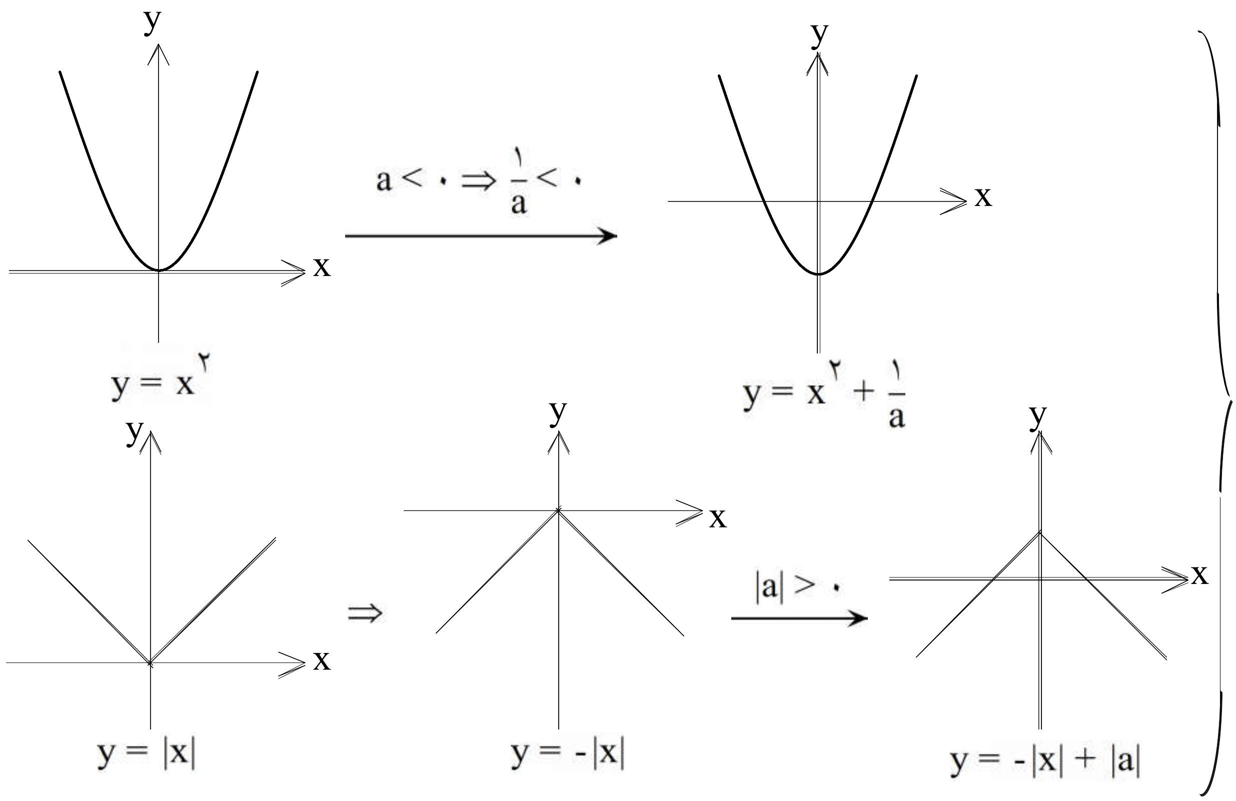
$$\begin{cases} a^\beta > ۱ \Rightarrow a^\beta > a^۰ \xrightarrow{۰ < a < ۱} \beta < ۰ \xrightarrow[\beta < -۱]{\text{و طبق شکل}} \beta < -۱ \\ \beta^۲ - ۱ > ۱ \Rightarrow \begin{cases} \beta > \sqrt{۲} \\ \text{یا} \\ \beta < -\sqrt{۲} \end{cases} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \beta < -\sqrt{۲}$$

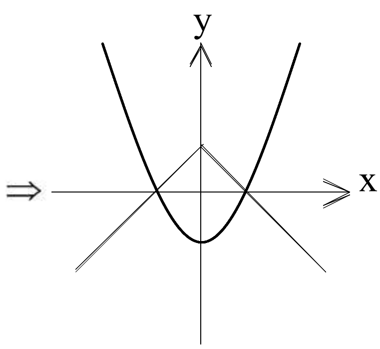
۳۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{۴^x + ۱}{۲ - x^۲} = ۲^x \Rightarrow \frac{۴^x + ۱}{۲^x} \Rightarrow \frac{۴^x}{۲^x} + \frac{۱}{۲^x} = ۲ - x^۲ \Rightarrow ۲^x + \frac{۱}{۲^x} = ۲ - x^۲ \quad *$$

حالا اگر بخواهیم از طریق رسم، تعداد جواب‌ها را بیابیم، رسم $y = ۲^x + \frac{۱}{۲^x}$ را بلد نیستیم. پس از نکته‌ی $\left(b > ۰ \Rightarrow b + \frac{۱}{b} \ge ۲\right)$ کمک می‌گیریم. نمودار $y = a^x$ همواره بالای محور x هاست پس همواره a^x مثبت است؛ یعنی $a^x + \frac{۱}{a^x} \ge ۲$ بنابراین سمت چپ معادله‌ی * همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است؛ در حالی‌که سمت راست آن همواره کوچک‌تر یا مساوی ۲ است (چون: $x^۲ \ge ۰ \Rightarrow -x^۲ \le ۰ \xrightarrow{+۲} ۲ - x^۲ \le ۲$). پس تساوی * زمانی امکان‌پذیر است که دو طرف معادله ۲ باشد؛ یعنی فقط $x^۲ \ge ۰ \Rightarrow -x^۲ \le ۰ \xrightarrow{+۲} ۲ - x^۲ \le ۲$ جواب است.

۳۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. معادله را به فرم $x^2 + \frac{1}{a} = |a| - |x|$ می‌نویسیم. داریم:

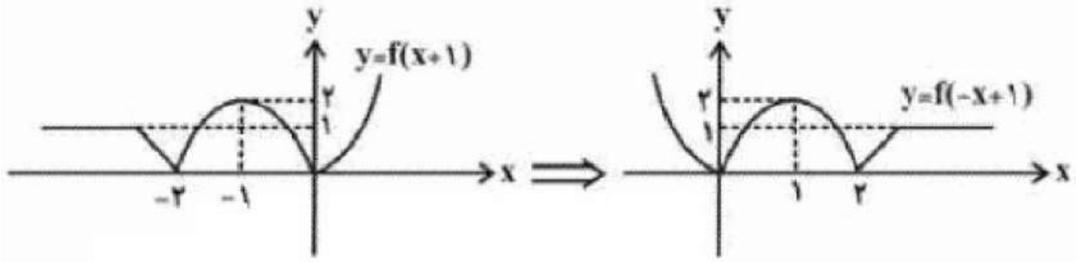




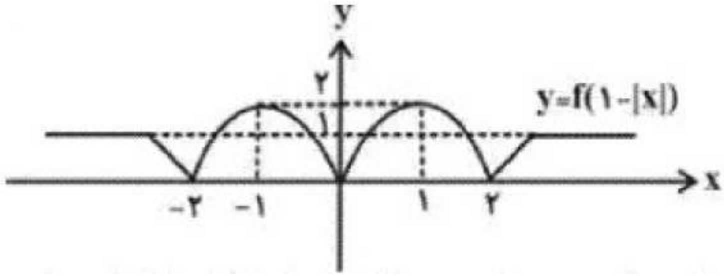
معادله همواره دو ریشه دارد ولی چون هر دو نمودار نسبت به محور y ها متقارن هستند، ریشه‌ها قرینه‌ی یکدیگرند و مجموعشان صفر است.

۳۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(1-|x|)=\begin{cases} f(1-x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(1+x) & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

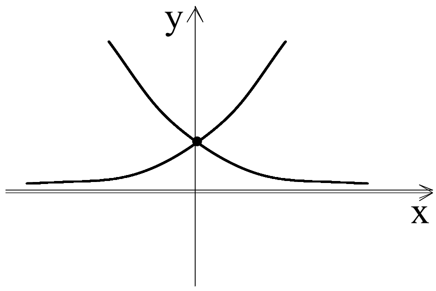


از نمودار $y=f(x+1)$، x های منفی و از نمودار $y=f(-x+1)$، x های مثبت باقی می‌ماند. پس داریم:



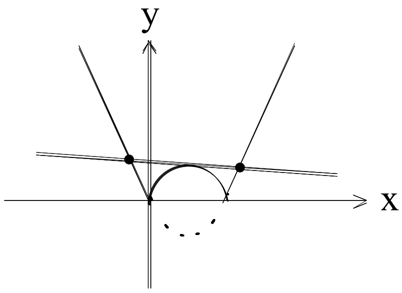
با توجه به نمودار به ازای $0<k<1$، معادله ی $f(1-|x|)=k$، ۶ جواب دارد.

۳۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم تابع 2^x صعودی و تابع 3^{-x} نزولی است. فقط در نقطه $x=0$ متقاطع‌اند. یعنی ۱ نقطه تقاطع دارند.



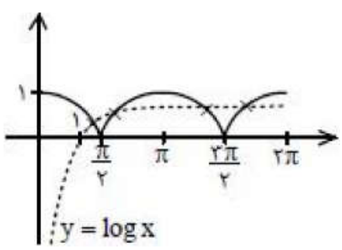
۴۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

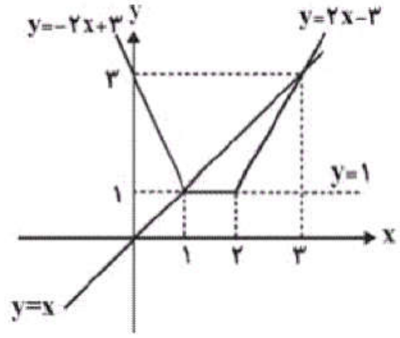
با رسم نمودار تابع $y=|x^2-x|$ خط $y=\frac{1}{4}$ در سه نقطه با منحنی مشترک‌اند.



۴۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه کرد که: $\text{Log}\, 2\pi < 1$

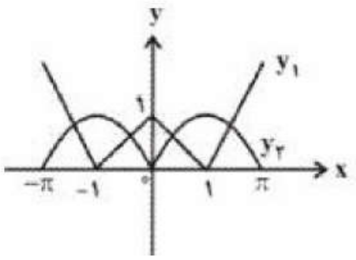
$y=\text{Log}\, x$
$y=|\text{Cos}\, x|$

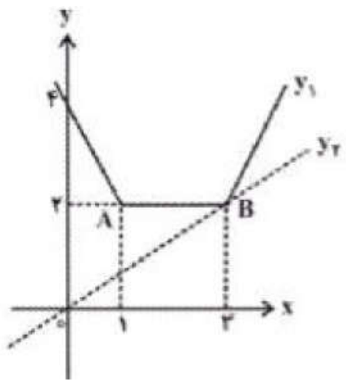




۴۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. نمودار $y = |x - ۱| + |x - ۲|$ و خط $y = x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده، نقاط تقاطع آن‌ها را مشخص می‌کنیم: با توجه به نمودار روبه‌رو بزرگ‌ترین بازه‌ای که نامعادله‌ی $|x - ۱| + |x - ۲| < x$ در آن برقرار است، بازه‌ی (۳و۱) است. پس با توجه به سؤال، بیش‌ترین مقدار $b - a$ برابر می‌شود با $۳ - ۱ = ۲$

۴۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. محل برخورد نمودارهای $y_۱$ و $y_۲$ جواب‌های مسأله است. بنابراین معادله چهار جواب دارد.





۴۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y_۱ = |x - ۱| + |x - ۳|$ به صورت زیر است.

برای این که خط $y_۲ = mx$ (که از مبدأ می‌گذرد) نمودار $y_۱$ را در دو نقطه قطع کند، باید شیب $y_۲$ از OB بیش‌تر و از شیب نیم خط سمت راست نمودار $y_۱$ کم‌تر باشد.

$$m_{OB} = \frac{۲ - ۰}{۳ - ۰} = \frac{۲}{۳} \quad (۱)$$

شیب نیم خط سمت راست $y_۱$ = ۲ (۲)

$$(۲), (۱) \Rightarrow \frac{۲}{۳} < m < ۲ \xrightarrow{m \in N} m = ۱$$

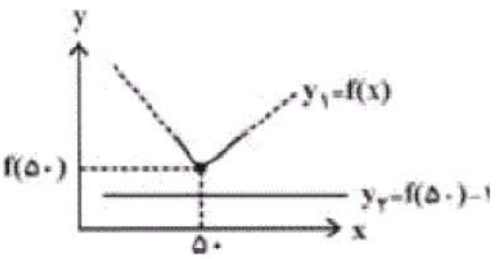
یک مقدار طبیعی برای m وجود دارد.

۴۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. از معادله‌ی مفروض برای $x \neq ۰$، خواهیم داشت $\text{Sin}\, x = \frac{۱}{x}$ پس ریشه‌های معادله‌ی مفروض، طول‌های نقاط برخورد منحنی $y_۱ = \frac{۱}{x}$ و $y_۲ = \text{Sin}\, x$ است. با رسم نمودار این توابع در فاصله‌ی $[۰ , ۲\pi]$ در یک دستگاه مختصات دو نقطه‌ی برخورد پدید می‌آید. پس معادله در این فاصله دو ریشه دارد.

۴۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. f ، مجموع چند عبارت نامنفی است و کم‌ترین مقدار آن به ازای ریشه‌ی جمله‌ی وسط یعنی $x = ۵۰$ به دست می‌آید. یعنی: $f_{min} = f(۵۰)$

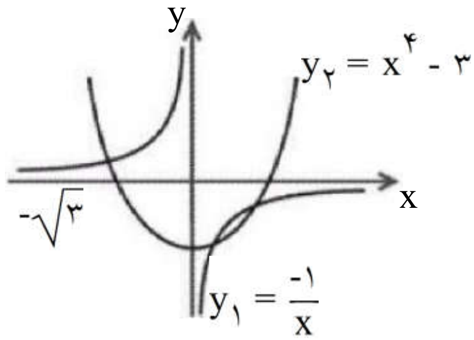
$$۱ + f(x) = f(۵۰) \Rightarrow f(x) = f(۵۰) - ۱$$

با رسم نمودار $y_۱ = f(x)$ در همسایگی $x = ۵۰$ و $y_۲ = f(۵۰) - ۱$ مشاهده می‌شود:



دو نمودار نقطه برخوردی ندارند لذا معادله فاقد جواب است.

۴۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. کافی است نمودار دو تابع با ضابطه $y_۱ = \frac{-۱}{x}$ و $y_۲ = x^۴ - ۳$ را در یک دستگاه، رسم کنیم و تعداد نقاط تلاقی آن‌ها را بیابیم.



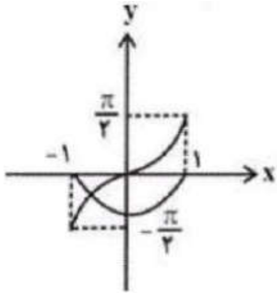
نمودار $y_۲ = x^۴ - ۳$ ، شبیه $y = x^۲ - ۳$ است. به ازای $x < ۰$ دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، اما به ازای $x > ۰$ ، از آنجایی که به ازای $x = ۱$ مقدار تابع $y_۲$ ، ۲- و مقدار تابع $y_۱$ ، ۱- است، پس تابع $y_۱ = \frac{-۱}{x}$ در قبل از $\sqrt{۳}$ ، نمودار $y_۲$ را در نقطه قطع می‌کند، بنابراین دو تابع یک‌دیگر را در ۳ نقطه قطع می‌کنند و معادله سه ریشه دارد.

۴۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا دامنه‌ی متغیر معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲x + ۴ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۲ \\ ۱ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۱$$

مجموعه‌ی اعداد صحیح واقع در دامنه‌ی متغیر معادله، $\{-۲, -۱, ۰, ۱\}$ است که در بین آن‌ها فقط $x = -۱$ در معادله صدق می‌کند.

۴۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

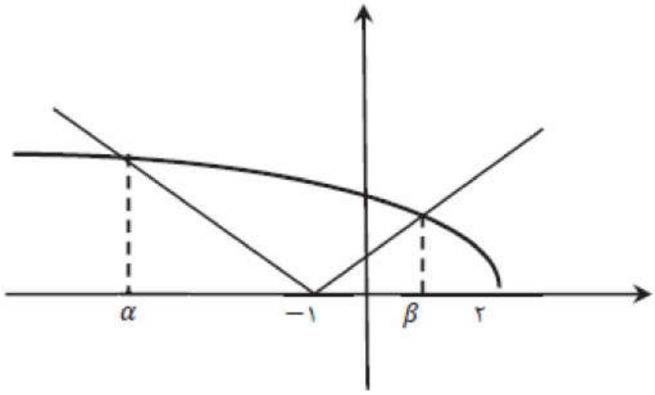


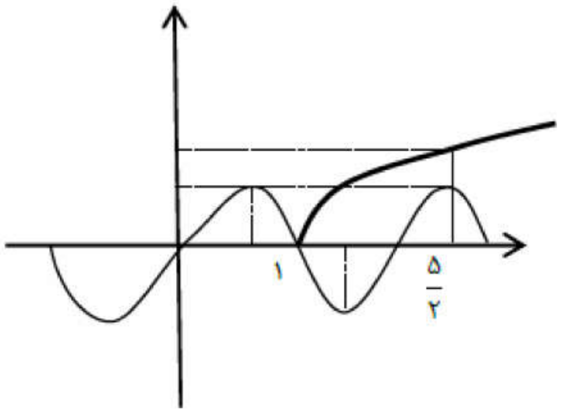
$$۱ + \text{Sin}^{-۱}x = x^۲$$

$$\Rightarrow \text{Sin}^{-۱}x = x^۲ - ۱ \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = \text{Sin}^{-۱}x \\ y_۲ = x^۲ - ۱ \end{cases}$$

با رسم $y_۱$ و $y_۲$ در یک دستگاه مختصات، مشاهده می‌شود که این دو منحنی تنها در یک نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند، پس معادله فقط یک جواب دارد. دقت کنید که دامنه‌ی معادله‌ی داده شده با توجه به وجود $\text{Sin}^{-۱}x$ بازه‌ی $[-۱, ۱]$ است.

۵۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نمودار زیر نشان می‌دهد معادله دو ریشه دارد.

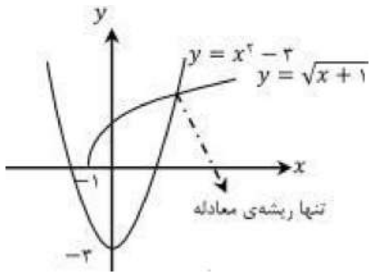




۵۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با فرض $x \geqslant ۰$ نمودار توابع $y = \sqrt{x - ۱}$ و $y = \text{Sin}(\pi x)$ را رسم می‌کنیم. به علت زوج بودن توابع $\sqrt{x - ۱}$ و $\text{Sin}(\pi x)$ تعداد جواب‌های معادله دو برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $\text{Sin}(\pi x) = \sqrt{x - ۱}$ می‌باشد. (دقت کنید $x = ۰$ جواب معادله نیست) جواب‌های معادله عبارتند از $x = ۱$ و $x = -۱$

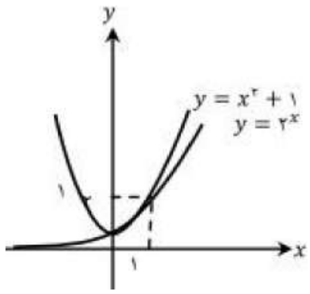
۵۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. تعداد ریشه‌های معادله برابر است با تعداد نقاط برخورد $y = \text{tg}^{-۱}x\ ,\ y = \text{Log}_۲ x$ و این دو تاقع فقط در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کند.

۵۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.



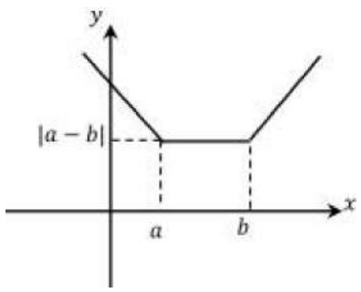
$$\sqrt{x + ۱} = x^۲ - ۳$$

۵۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با این که در ابتدابرای بعضی x ها که در فاصله‌ی $x > ۱$ هستند دیده می‌شود که نمودار $y = x^۲ + ۱$ بالاتراز $y = ۲^x$ است اما طبق جدول زیر می‌بینیم که معادله‌ی ریشه‌ی سومی در فاصله‌ی $(۴,۵)$ دارد.



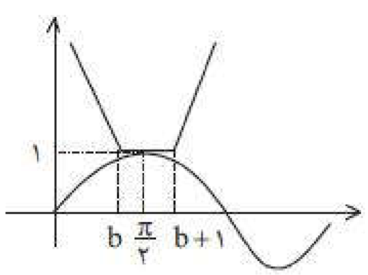
	x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
	۲^x	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲
$x^۲ + ۱$		۱	۲	۵	۱۰	۱۷	۲۶

۵۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. نکته: معادله‌ی $|x - a| + |x - b| = k$ وقتی $k = |a - b|$ دارای بی‌شمار جواب ست.



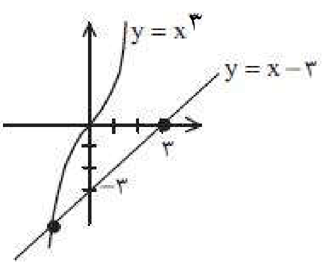
$$y = |x - a| + |x - b|$$

۵۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow b \leqslant \frac{\pi}{۲} \leqslant b + ۱ \Rightarrow \frac{\pi}{۲} - ۱ \leqslant b$$

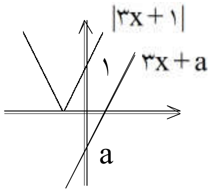
۵۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



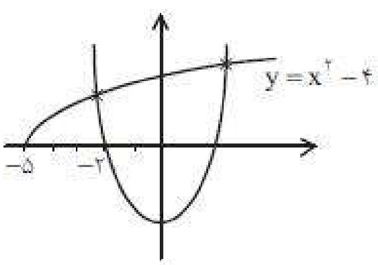
$$x^۳ - x + ۳ = ۰ \Rightarrow x^۳ = x - ۳ \Rightarrow \begin{cases} y = x^۳ \\ y = x - ۳ \end{cases}$$

تعداد ریشه‌های معادله‌ی $x^۳ - x + ۳ = ۰$ برابر است با تعداد نقاط برخورد دو تابع $y = x^۳$ و $y = x - ۳$. پس این معادله فقط یک ریشه‌ی منفی دارد.

۵۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با فرض $a < ۱$ معادله جواب ندارد.



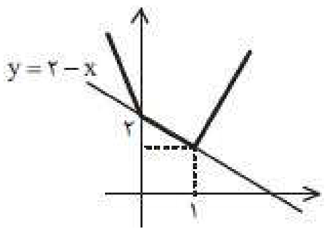
۵۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



$$\sqrt{x+۵} = x^۲ - ۴ \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x+۵} \\ y = x^۲ - ۴ \end{cases}$$

نمودار دو تابع در ۲ نقطه یک‌دیگر را قطع می‌کنند.

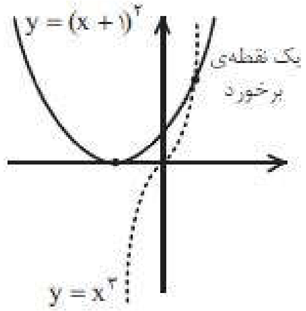
۶۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.



$$y = ۲|x - ۱| + |x|$$
$$x < ۰ \Rightarrow y = -۲x + ۲ - x = -۳x + ۲$$
$$۰ \leqslant x \leqslant ۱ \Rightarrow y = -۲x + ۲ + x = -x + ۲$$
$$۱ < x \Rightarrow y = ۲x - ۲ + x = ۳x - ۲$$

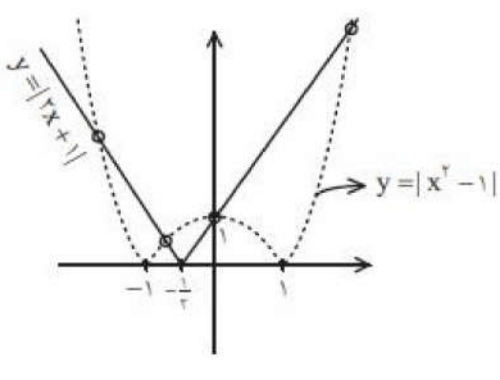
خط $y = -x + ۲$ بر نمودار تابع منطبق است.

۶۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



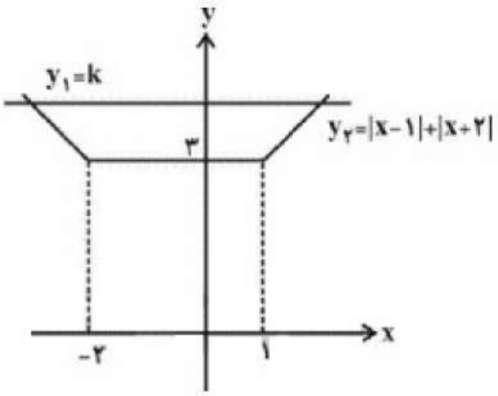
$$x^۳ = x^۲ + ۲x + ۱ \Rightarrow x^۳ = (x+۱)^۲$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = x^۳ \\ y = (x+۱)^۲ \end{cases}$$

۶۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. کافی است تعداد نقاط برخورد نمودار دو تابع $y = |۲x + ۱|$ و $y = |x^۲ - ۱|$ را بیابیم:



این دو نمودار در ۴ نقطه یک‌دیگر را قطع می‌کنند.

۶۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



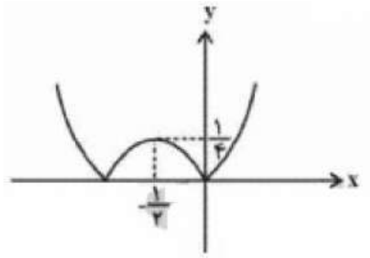
اگر بخواهیم معادله دو جواب داشته باشد، محل تقاطع دو نمودار به ازای $x > ۱$ و $x < -۲$ به دست می‌آید.

$$x > ۱ \Rightarrow x - ۱ + x + ۲ = k \Rightarrow ۲x = k - ۱ \Rightarrow x = \frac{k - ۱}{۲}$$

$$x < -۲ \Rightarrow -x + ۱ - x - ۲ = k \Rightarrow -۲x = k + ۱ \Rightarrow x = \frac{k + ۱}{-۲}$$

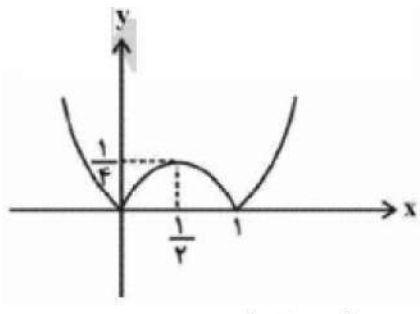
$$\text{تفاضل ریشه ها} = ۷ \Rightarrow \frac{k - ۱}{۲} - \left(-\frac{k + ۱}{۲}\right) = ۷ \Rightarrow \frac{k - ۱ + k + ۱}{۲} = ۷ \Rightarrow k = ۷$$

۶۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = |x^۲ + x|$ به شکل زیر است:



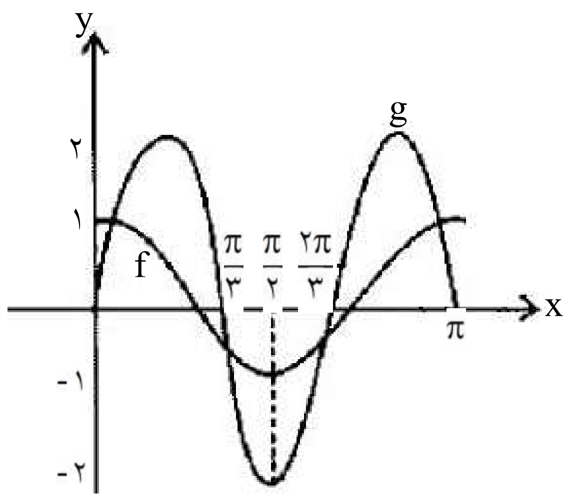
برای این‌که معادله‌ی $|x^۲ + x| = k$ دارای ۴ جواب باشد، لازم است که $۰ < k < \frac{۱}{۴}$ باشد.

بنابراین اگر در ضابطه ی تابع $y = |x^۲ + x|$ به جای x مقدار x- را قرار دهیم، تابع $y = |x^۲ + x|$ به دست می‌آید. یعنی نمودار این دو تابع نسبت به محور y ها متقارن است. بنابراین نمودار تابع $y = |x^۲ + x|$ به شکل زیر است:

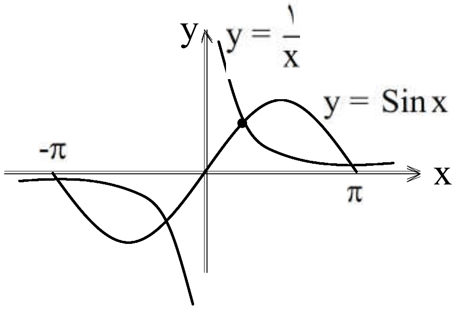


بنابراین اگر $۰ < k < \frac{۱}{۴}$ باشد، معادله‌ی $|x^۲ - x| = k$ نیز دارای ۴ جواب خواهد بود.

۶۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نمودار دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \text{Cos}\,۲x$ و $g(x) = ۲\,\text{Sin}(۳x)$ را در فاصله‌ی $[۰\ ,\ \pi]$ رسم می‌کنیم. این دو نمودار در ۴ نقطه یک‌دیگر را قطع می‌کنند.



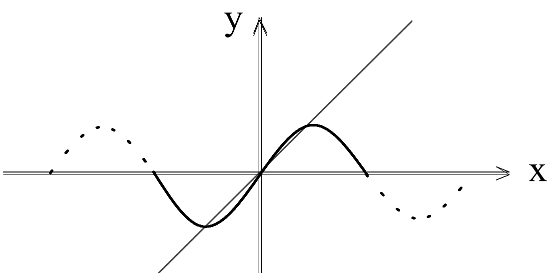
۶۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$x\ \text{Sin}\,x - ۱ = ۰ \Rightarrow \text{Sin}\,x = \frac{۱}{x}$$

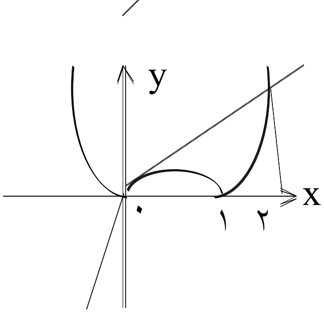
با توجه به شکل در این بازه ۴ جواب دارد.

۶۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



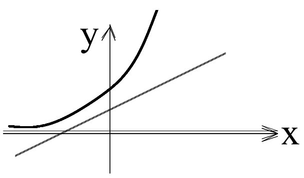
تعداد جواب‌ها برابر تعداد نقاط تلاقی منحنی $y = ۲\,\text{Sin}\,x$ با خط $y = x$ است که در سه نقطه متقاطع‌اند. پس تعداد جواب‌های معادله ۳ می‌باشد.

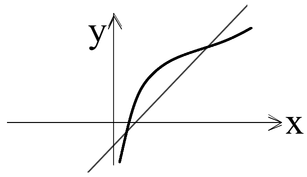
۶۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



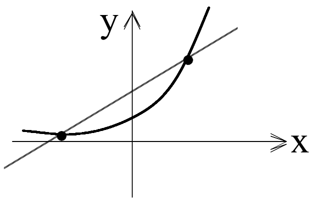
دو تابع با ضابطه‌های $y = |x^۲ - x|$, $\begin{cases} y = x\ ;\ x > ۰ \\ ۳x\ \ ;\ x < ۰ \end{cases}$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم در ۲ نقطه متقاطع‌اند. پس ۲ نقطه‌ی مشترک دارند $x = ۰, ۲$

۶۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. نمودار دو تابع $y = x + \frac{۱}{۲}\ ,\ y = ۲^x$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. پیدا است که نقطه تلاقی ندارند یا تعداد نقاط تلاقی صفر است.

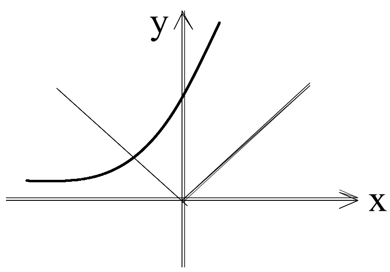




۷۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. هر دو منحنی $y = \log_3 x$, $y = 2x - 3$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم نقاط تلاقی در ۲ نقطه مثبت است.



۷۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با رسم نمودارهای هر دو تابع در یک دستگاه محورهای مختصات محل تلاقی آن‌ها در ۲ نقطه متمایز است.



۷۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

هر دو تابع $y = |x|$, $y = 2^x$ در یک دستگاه رسم شوند. برای $x \geqslant 0$ همواره $2^x > x$ است، فقط برای xهای منفی دو تابع در یک نقطه مشترک‌اند.

۷۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. بنابر قانون لگاریتم عبارت مجموع دو لگاریتم به صورت لگاریتم حاصلضرب نوشته می‌شود.

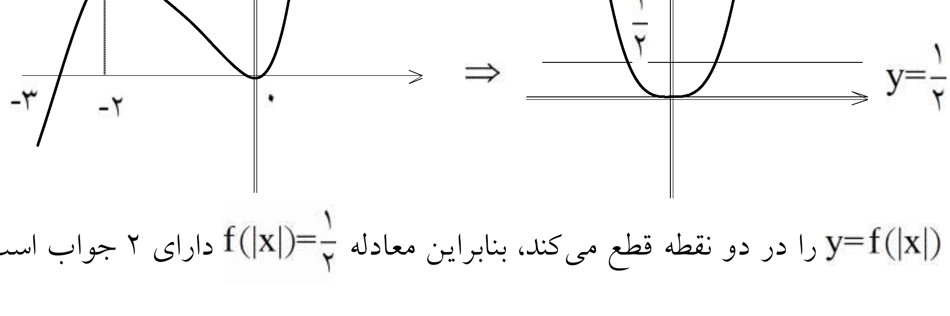
$$\log(2x+1)(x-8) = 2 \Rightarrow (2x+1)(x-8) = 10^2$$

$$2x^2 - 15x - 108 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{225+864}}{4} = \frac{15 \pm \sqrt{1089}}{4}$$

پس $x = \frac{15+33}{4}$ عدد منفی برای لگاریتم مورد قبول نیست.

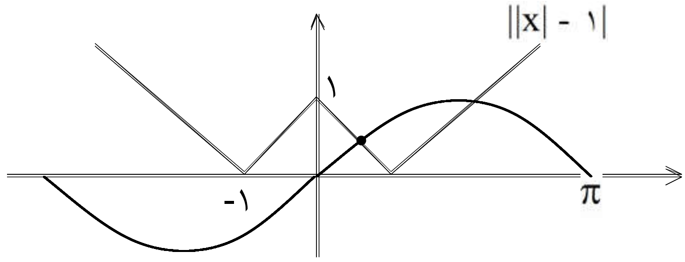
$$\log_8(x+4) = \log_8 16 = 4\log_8 2 = 4\log_8 8^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\log_8 8 = \frac{4}{3}$$

۷۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.



خط $y=\frac{1}{2}$ نمودار $y=f(|x|)$ را در دو نقطه قطع می‌کند، بنابراین معادله $f(|x|)=\frac{1}{2}$ دارای ۲ جواب است.

۷۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

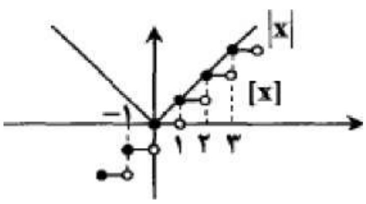


۷۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. $f(|x|) \leqslant f([x]) \Rightarrow |x| - ۲ \leqslant [x] - ۲ \Rightarrow |x| \leqslant [x]$

نامعادله‌ی فوق را با تعیین علامت قدرمطلق حل می‌کنیم:

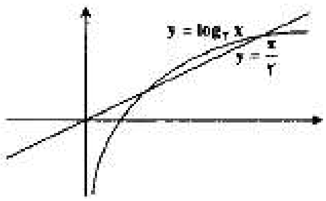
$$\begin{cases} x \geqslant ۰ : x \leqslant [x] \Rightarrow x \in N \cup \{۰\} \\ x < ۰ : -x \leqslant [x] \Rightarrow \text{فاقد جواب است} \end{cases}$$

راه حل دیگر: می‌توانیم از رسم نمودار کمک بگیریم:



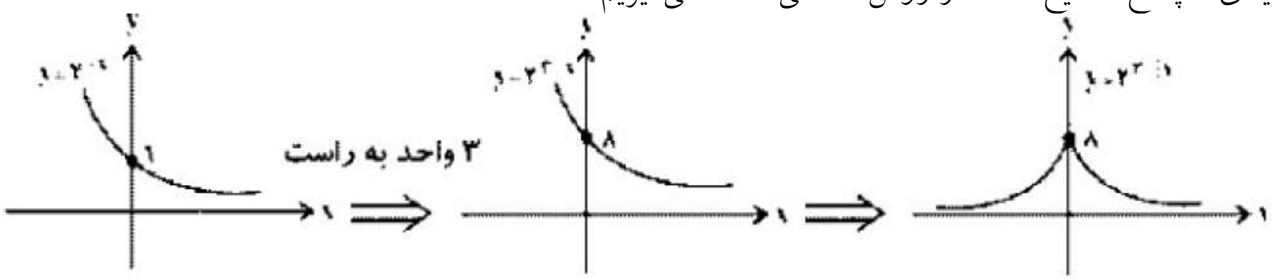
$|x| \leqslant [x] \Rightarrow x \in N \cup \{۰\}$

۷۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\log_۲ x = \frac{x}{۲} \Rightarrow x = ۲^{\frac{x}{۲}} \Rightarrow x^۲ = ۲^x \Rightarrow x = ۲ , x = ۴$$
$$\Rightarrow x \in (۲,۴) \Rightarrow b - a = ۲$$

۷۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. از روش هندسی کمک می‌گیریم:

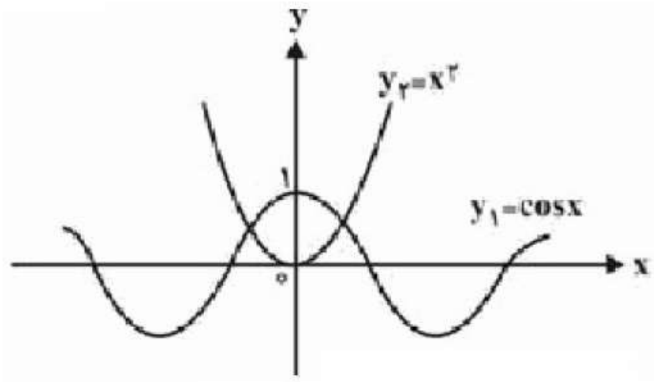


برای این‌که نمودار رسم شده، خط $y = k$ را در دو نقطه قطع کند، داریم:

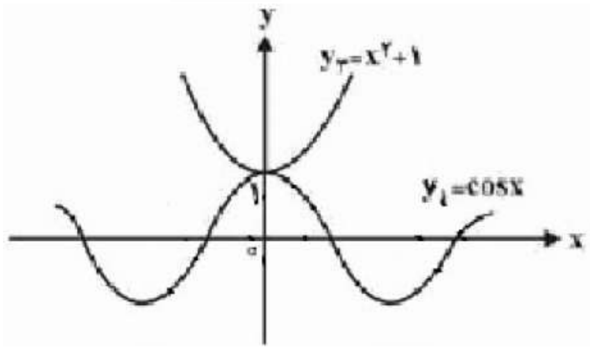
$$۰ < k < ۸ \xrightarrow{k \in Z} k = ۱ , ۲ , \dots , ۷$$

پس k هفت مقدار صحیح می‌تواند اختیار کند.

۷۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. بدون درنظر گرفتن m ، ابتدا معادله‌ی $x^2 - \cos x = 0$ یا $x^2 = \cos x$ را درنظر بگیرید. دو نمودار $y_1 = \cos x$ و $y_2 = x^2$ را رسم می‌کنیم.



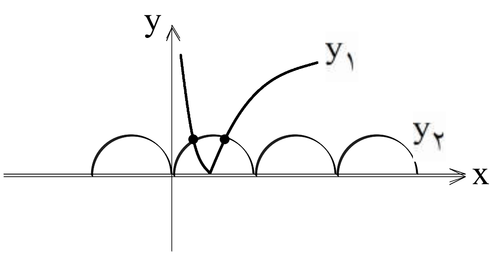
حالا معادله‌ی $m + x^2 = \cos x$ را درنظر بگیرید.
برای این‌که معاله یک جواب داشته باشد باید دو نمودار $y_1 = \cos x$ و $y_3 = x^2 + m$ در یک نقطه یک‌دیگر را قطع کنند (مماس باشند.) با توجه به شکل قبلی باید نمودار $y_2 = x^2$ یک واحد به بالا بیاید. یعنی $m = 1$.



۸۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$|\text{Log}_{10} x| = |\text{Sin}\, x|$

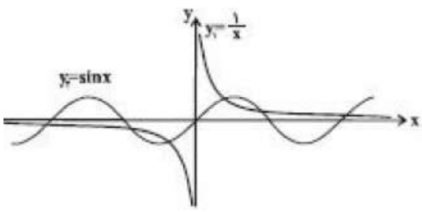
$$\begin{cases} y_1 = |\text{Log}_{10} x| \\ y_2 = |\text{Sin}\, x| \end{cases}$$



دو نقطه برخورد دارد، بنابراین دو جواب دارد.

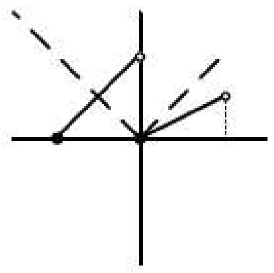
۸۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x\,\text{Sin}\, x = 1 \Rightarrow \underbrace{\text{Sin}\, x}_{y_2} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{y_1}$$



با توجه به شکل مشاهده می‌شود که معادله بی‌شمار جواب دارد.

۸۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای مقادیر $x \le ۱$ دو تابع هم‌علامت نیستند یعنی نقطه مشترک ندارند برای مقادیر $x > ۱$ تابع $y = ۲\mathrm{Ln}x = \mathrm{Ln}x^{۲}$ و تابع $y = e^{x^{۲}}$ معکوس هم‌اند و نمودار آن‌ها نسبت به نیم‌ساز ناحیه اول و سوم متقارن‌اند و هیچ نقطه مشترکی ندارند یا تعداد نقاط مشترک آن‌ها صفر است.



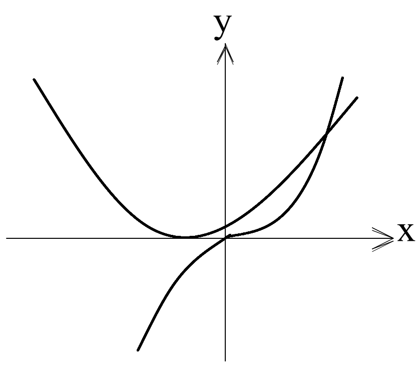
۸۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع $f(x) = \frac{۳}{۴}x - \left[\frac{۳}{۴}x\right]$ متناوب و دوره تناوب آن $\frac{۴}{۳}$ است و برد $[۰ , ۱)$ می‌باشد نقطه تلاقی این تابع و تابع $y = |x|$ در ناحیه دوم است.

$$\begin{cases} \frac{۳}{۴}x - (-۱) \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \frac{۷}{۴}x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۴}{۷}$$

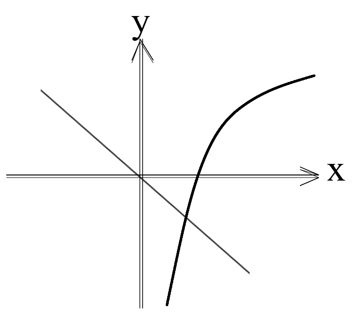
۸۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$f(x) = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲x} = \left(\frac{۱}{۴}\right)^{x} , g(x) = \frac{۱}{۴}(۴)(۴)^{-x} = \left(\frac{۱}{۴}\right)^{x}$ پس دو تابع یکسان هستند. بی‌شمار نقطه مشترک دارد.

۸۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ریشه معادله $x^{۳} - x^{۲} - ۸x - ۱۶ = ۰ \Rightarrow x^{۳} = (x + ۴)^{۲}$ عبارت است از طول نقطه تلاقی منحنی‌های $y = x^{۳}$ و $y = (x + ۴)^{۲}$ که با رسم شکل پیداست که یک ریشه مثبت دارد.



۸۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ریشه‌های حقیقی معادله $\mathrm{Log}x = -x$ طول نقطه تلاقی منحنی $y = \mathrm{Log}x$ با نیم‌ساز ربع چهارم است. با توجه به شکل معادله مفروض ۱ جواب حقیقی دارد.



۸۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بایستی مجموعه جواب نامعادله $|x - ۴| - ۱ < \sqrt{-x + ۳}$ را تعیین کنیم

$$۱)\ x > ۴ \Rightarrow x - ۵ < \sqrt{-x + ۳} \rightarrow x^۲ - ۹x + ۲۲ < ۰$$

چون $\Delta = ۸۱ - ۸۸ < ۰$ نامعادله فوق فاقد جواب است

$$۲)\ x < ۴ \Rightarrow -x + ۳ < \sqrt{-x + ۳} \rightarrow x^۲ - ۵x + ۶ < ۰$$

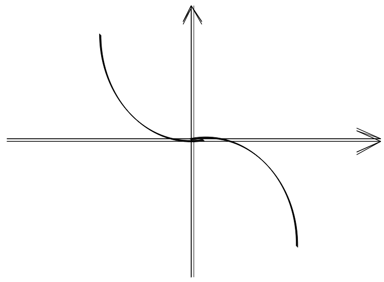
با تعیین علامت نامعادله (۲) داریم

x		۲		۳	
$x^۲ - ۵x + ۶$	+	۰	-	۰	+

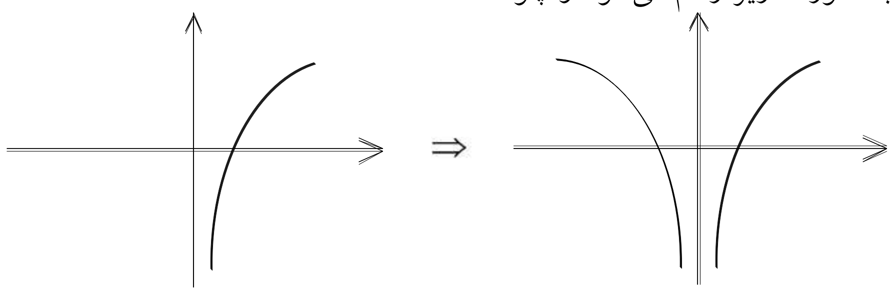
در نتیجه (۳ و ۲) بازه‌ای است که مقادیر $y = |x - ۴| - ۱$ کم‌تر از $y = \sqrt{-x + ۳}$ است.

۸۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله را به‌صورت $|\text{Log}|x|| = -x|x|$ می‌نویسیم محل برخورد نمودارهای $y = -x|x|$ و $y = |\text{Log}|x||$ تعداد ریشه‌ای معادله است ابتدا معادله $y = -x|x|$ را به صورت زیر می‌نویسیم و رسم می‌کنیم.

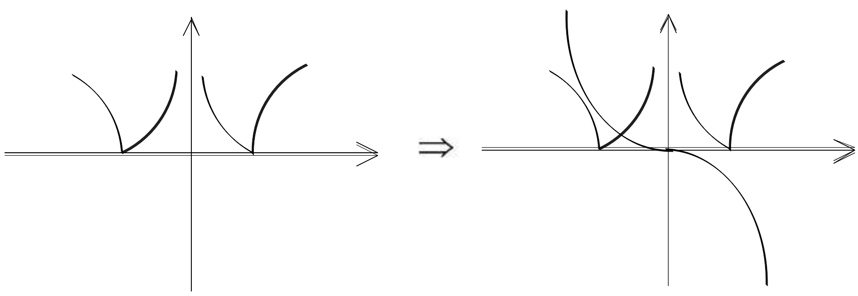
$$y = -x|x| = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x^2 & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



از طرفی $y = \text{Log}\, x$ به صورت زیر رسم می‌شود و چون



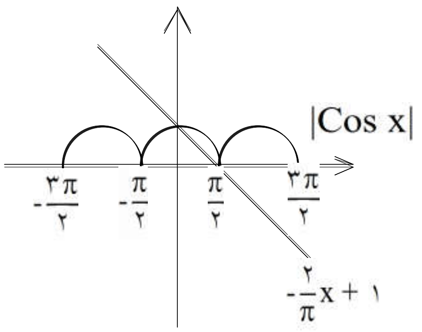
در نتیجه نمودار $y = |\text{Log}|x||$ به صورت زیر خواهد بود



در نتیجه با رسم همزمان دو نمودار $|\text{Log}|x||$ و $-x|x|$ تنها یک ریشه دارد.

۸۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله را به صورت $|\cos x| = -\frac{۲}{\pi}x + ۱$ می‌نویسیم. نقطه برخورد دو نمودار $y = |\cos x|$ و $y = -\frac{۲}{\pi}x + ۱$، تعداد ریشه‌های معادله را نشان می‌دهد.

این دو منحنی در دو نقطه به طول‌های $\frac{\pi}{۲}$ و صفر، یک‌دیگر را قطع می‌کنند، لذا معادله دارای دو ریشه است.



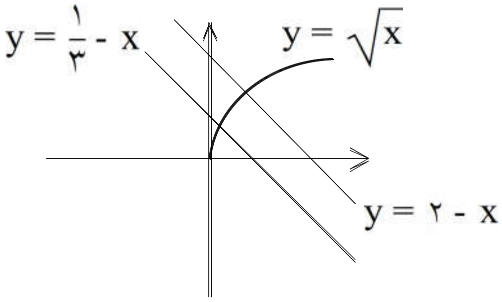
۹۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا مسأله را به صورت $\left(x + \sqrt{x}\right)^۲ - \frac{۷}{۳}\left(x + \sqrt{x}\right) + \frac{۲}{۳} = ۰$ می‌نویسیم با اختیار $t = x + \sqrt{x}$ داریم

$$t^۲ - \frac{۷}{۳}t + \frac{۲}{۳} = ۰ \Rightarrow \left(t - \frac{۱}{۳}\right)(t - ۲) = ۰ \Rightarrow t_۱ = \frac{۱}{۳},\ t_۲ = ۲$$

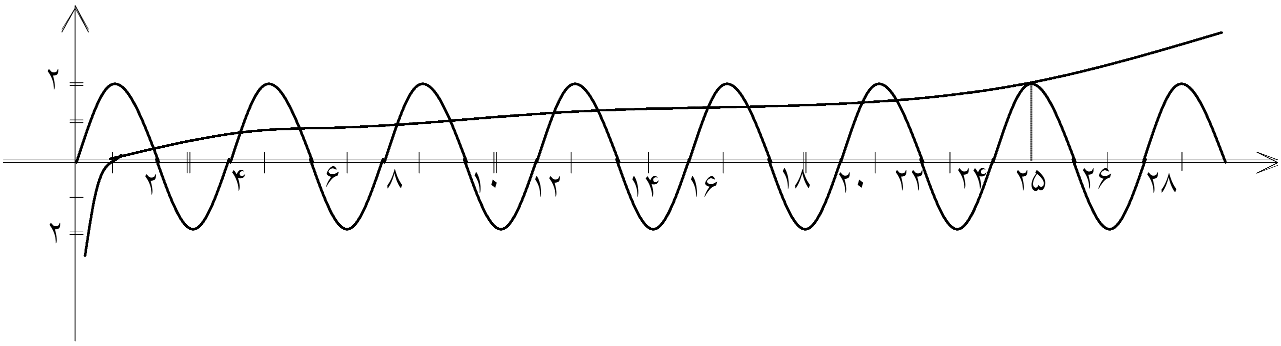
برای تعداد ریشه‌ای $x + \sqrt{x} = ۲$ و $x + \sqrt{x} = \frac{۱}{۳}$ کافی است قرار دهیم

$$\begin{cases} \sqrt{x} = ۲ - x \\ \sqrt{x} = \frac{۱}{۳} - x \end{cases} \xrightarrow{y = \sqrt{x}} \begin{cases} y = ۲ - x \\ y = \frac{۱}{۳} - x \end{cases}$$

برای یافتن تعداد ریشه‌ها نمودار $y = \sqrt{x}$ را با نمودارهای $y = ۲ - x$ و $y = \frac{۱}{۳} - x$ هم‌زمان رسم می‌کنیم در شکل زیر تعداد نقاط تقاطع برابر دو است.



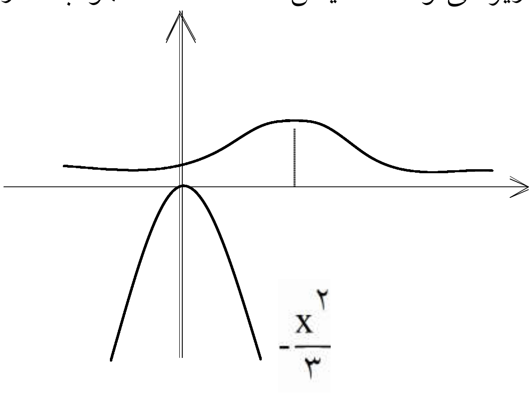
۹۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. معادله را به صورت $\mathrm{Log}_5 x = 2\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2}x$ بازنویسی می‌کنیم. کافی است نمودار $2\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2}x$ و $\mathrm{Log}_5 x$ را رسم و تعداد نقاط تلاقی را بیابیم. با توجه به این‌که $\mathrm{Log}_5 25 = 2$ و در ۵ بازه به طول ۴ تعداد نقاط تقاطع دو منحنی برابر ۲ است و در بازه $[0\ ,\ 4]$ یک نقطه تقاطع دارند و آخرین نقطه تقاطع دو منحنی در نقطه‌ای به طول ۲۵ است در نتیجه معادله ۱۲ جواب دارد.



۹۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله را به صورت زیر درنظر می‌گیریم

$$x^4 - x^3 + 3x^2 = -3 \Rightarrow x^2\left(x^2 - x + 3\right) = -3 \Rightarrow \frac{x^2}{-3} = \frac{1}{x^2 - x + 3}$$

با توجه به نمودار داده شده برای محاسبه تعداد ریشه‌ها کافی است نمودار سهمی $\frac{x^2}{-3}$ را به همراه نمودار رسم شده رسم نماییم در این صورت از شکل زیر می‌توان تشخیص داد که معادله جواب ندارد.

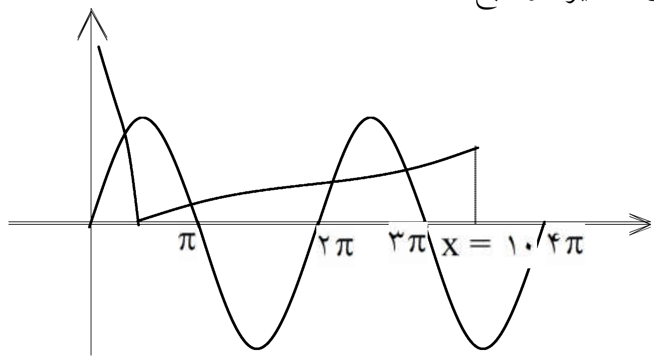


مجموعه تست دبیرستان **ممتاز حنان**

درس: **حسابان** | پایه: دوازدهم

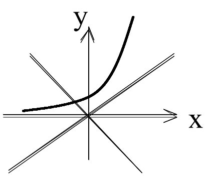
موضوع: **حل معادلات به روش هندسی** | **نام دبیر: استاد علی مقدم**

۹۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کافی است نمودار دو تابع را در محورهای مختصات رسم کنیم در این صورت محل تقاطع نمودارها به معنی تساوی مقادیر دو تابع است.



با توجه به شکل و این‌که $\operatorname{Log} ۱۰ = ۱$ بنابراین این دو تابع در ۴ نقطه مقادیر یکسان دارند.

۹۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار $y^۲ - x^۲ = ۰$، دو خط $y = -x \, , \, y = x$ است.



با رسم نمودار تابع $y = ۲^x$ با نیمساز ربع اول نقطه مشترک ندارد و نیمساز ناحیه دوم را فقط در یک نقطه قطع می‌کند یعنی تعداد نقاط تلاقی آن‌ها ۱ می‌باشد.

۹۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. $(۲, -۲)$ نقطه‌ی می‌نیمم تابع $f(x)$ است $(f(۲) = -۲)$. در تابع $y = \frac{۱}{۲} f(۱ - x)$ اگر $x = -۱$ را قرار دهیم کم‌ترین مقدار تابع $\frac{۱}{۲} f(۲) = \frac{۱}{۲}(-۲) = -۱$ به‌دست می‌آید، پس نقطه‌ی می‌نیمم این تابع $(-۱, -۱)$ است.

۹۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. $۲ - ۳x \geq ۰ \Rightarrow x \leq \frac{۲}{۳}$

بدون استفاده از قوانین رسم و با تعیین دامنه گزینه‌ی درست مشخص می‌شود. با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌ی ۱ فقط این دامنه را دارد.